Лекція № 4

1.8. Тензорна алгебра та елементи тензорного аналізу у тривимірному просторі

На минулій лекції дали визначення тензору у тривимірному та у чотиривимірному просторі. Необхідні для курсу електродинаміки відомості про тензори почнемо вивчення властивостей тензорів та дій над ними у тривимірному просторі.

Тривимірний тензор рангу r – це сукупність 3^r, які при поворотах координат перетворюються, як добутки компонент r векторів. Ранг тензору визначається кількістю індексів. Тензор нульового рангу (без індексів) є скаляром, тензор 1-го рангу є вектором. Домовились, що просторові індекси позначатимемо грецькими літерами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Скаляр, вектор, тензор – математичні величини, які визначаються своїми законами перетворення при поворотах системи координат. Це «абстракції» реальних фізичних величин : ρ – густина, $\vec{V}$ – швидкість, $\vec{E}, \vec{H}$ – напруженості електричного та магнітного полів, $I_{\alpha\beta}$ – тензор моментів інерції твердого тіла та ін. Саме з цим пов'язано широке використання цих математичних понять у фізиці.

Скаляр – величина, яка не змінюється при поворотах координат:

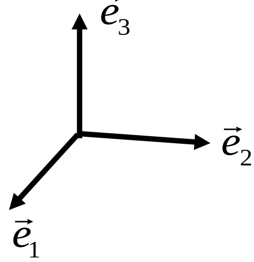
$$\varphi(x, y, z) = \varphi'(x', y', z').$$

Тиск, температура, густина, час (час – тільки відносно просторових поворотів!) – ось декілька прикладів тривимірних скалярів.

Вектор в тривимірному просторі можна задати трьома проекціями на осі декартових координат

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 = \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha \vec{e}_\alpha .$$

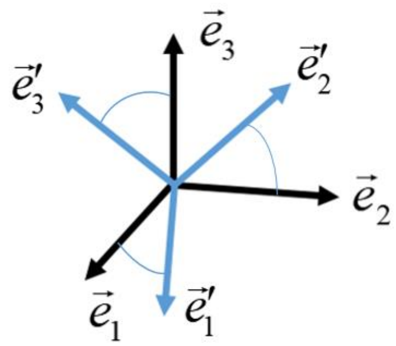
$\vec{e}_\alpha$ – одиничні вектори (орти), які задають напрямки трьох взаємно перпендикулярних осей координат.



Координати вектору – це проекції на орти

$$A_\alpha = (\vec{A}, \vec{e}_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

В іншій системі координат, осі якої повернуті відносно даної (початки координат обох систем співпадають),



той самий вектор задається, як

$$\vec{A} = A'_1\vec{e}\,'_1 + A'_2\vec{e}\,'_2 + A'_3\vec{e}\,'_3 = \sum_{\alpha'=1}^{3} A'_{\alpha'}\vec{e}\,'_{\alpha'}.$$

$$A'_\alpha = (\vec{A}, \vec{e}\,'_{\alpha'}), \quad \alpha' = 1, 2, 3.$$

$$A_\alpha = (A'_1\vec{e}\,'_1 + A'_2\vec{e}\,'_2 + A'_3\vec{e}\,'_3, \vec{e}_\alpha).$$

$$\begin{aligned}
\alpha = 1; \quad & A_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}\,'_1)A'_1 + (\vec{e}_1, \vec{e}\,'_2)A'_2 + (\vec{e}_1, \vec{e}\,'_3)A'_3; \\
\alpha = 2; \quad & A_2 = (\vec{e}_2, \vec{e}\,'_1)A'_1 + (\vec{e}_2, \vec{e}\,'_2)A'_2 + (\vec{e}_2, \vec{e}\,'_3)A'_3; \\
\alpha = 3; \quad & A_3 = (\vec{e}_3, \vec{e}\,'_1)A'_1 + (\vec{e}_3, \vec{e}\,'_2)A'_2 + (\vec{e}_3, \vec{e}\,'_3)A'_3.
\end{aligned}$$

Проекції пов'язані через направляючі косинуси $(\vec{e}_\alpha, \vec{e}\,'_\beta) = \cos(\vec{e}_\alpha, \vec{e}\,'_\beta)$

Побудуємо з них матрицю повороту

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \tag{1.62}$$

$$a_{\alpha\beta} = (\vec{e}_\alpha, \vec{e}\,'_\beta) = \cos(\vec{e}_\alpha, \vec{e}\,'_\beta).$$

та напишемо **закон перетворення вектору**

$$A_\alpha = a_{\alpha\beta}A'_\beta. \tag{1.63}$$

Тривимірними векторами є $\vec{r}, d\vec{r}, \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$. (Час – скаляр відносно поворотів просторових змінних)

Доведемо, що матриця повороту є ортогональною – сума добутків елементів різних рядків (стовпців) дорівнює нулю, а сума квадратів елементів однакових рядків (стовпців) дорівнює одиниці:

$$a_{\alpha\beta}a_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}; \quad a_{\alpha\beta}a_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma}. \tag{1.64}$$

Тут $\delta_{\alpha\gamma}$ – символ Кронекера

$$\delta_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 0, \alpha \neq \gamma; \\ 1, \alpha = \gamma. \end{cases} \tag{1.65}$$

Згадаємо, що $a_{\alpha\beta} = (\vec{e}_\alpha, \vec{e}'_\beta), a_{\gamma\beta} = (\vec{e}_\gamma, \vec{e}'_\beta)$. Виконаємо згортання по індексу β $a_{\alpha\beta}a_{\gamma\beta}$

$$a_{\alpha\beta}a_{\gamma\beta} = \underbrace{(\vec{e}_\alpha, \vec{e}'_\beta)}_{\substack{\textit{проекція } \vec{e}_\alpha \\ \textit{нанапрямок} \\ \vec{e}'_\beta}} \underbrace{(\vec{e}_\gamma, \vec{e}'_\beta)}_{\substack{\textit{проекція } \vec{e}_\gamma \\ \textit{нанапрямок} \\ \vec{e}'_\beta}} = \left(\vec{e}_\alpha\right)_{\beta'} \left(\vec{e}_\gamma\right)_{\beta'} = \left(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\gamma\right) = \delta_{\alpha\gamma}.$$

Ствердження доведено для рядків. Для стовпців це робиться аналогічно.

Поворот зберігає довжину вектору $A_\alpha^2 = A'^2_{\alpha'}$, як випливає з ортогональності матриці $a_{\alpha\beta}$. Матриця оберненого перетворення

$$A_\alpha = a_{\alpha\beta}A'_\beta; \quad a_{\alpha\gamma}A_\alpha = \underbrace{a_{\alpha\gamma}a_{\alpha\beta}}_{\delta_{\gamma\beta}} A'_\beta = \delta_{\gamma\beta}A'_\beta = A'_\gamma;$$

$$A'_\gamma = a_{\alpha\gamma}A_\alpha = \tilde{a}_{\gamma\alpha}A_\alpha;$$

$\tilde{a}_{\gamma\alpha} = a_{\alpha\gamma}$ – транспонована матриця.

Тензор другого рангу в тривимірному просторі складається з 9 компонент. Перетворення тензору 2-го рангу при поворотах

$$T_{\alpha\beta} = a_{\alpha\alpha'}a_{\beta\beta'}T'_{\alpha'\beta'}.$$

Тензор рангу r у тривимірному просторі 3^r-компонента величина, яка при поворотах перетворюється як добуток r векторів

$$T_{\alpha\beta\ldots\gamma} = a_{\alpha\alpha'}a_{\beta\beta'}\ldots a_{\gamma\gamma'}T'_{\alpha'\beta'\ldots\gamma'}. \tag{1.66}$$

Скаляр – це тензор нульового рангу, вектор – це тензор 1-го рангу. Ранг тензору визначається кількістю індексів $T_{\underbrace{\alpha\beta\ldots\gamma}_{r \text{ індексів}}}$.

1.8.1. Операції над тензорами

1. Тензори однакового рангу можна **додавати**

$$Q_{\alpha\beta\ldots\gamma} = T_{\alpha\beta\ldots\gamma} + P_{\alpha\beta\ldots\gamma}. \quad (1.67)$$

В результаті додавання отримаємо тензор того ж самого рангу.

2. Тензор будь-якого рангу можна **множити на число** (скаляр)

$$Q_{\alpha\beta\ldots\gamma} = \lambda T_{\alpha\beta\ldots\gamma} \quad (1.68)$$

В результаті отримаємо тензор того ж самого рангу.

3. Тензори будь-яких рангів можна множити (**зовнішній добуток**).

$$T_{\alpha\beta\ldots\gamma} \cdot P_{\alpha'\beta'\ldots\gamma'} = Q_{\alpha\beta\ldots\gamma\alpha'\beta'\ldots\gamma'}. \quad (1.69)$$

В результаті отримаємо тензор, ранг якого є сумою рангів цих тензорів.

4. Згортання по парі індексів (внутрішній добуток). Прирівнюємо два індекси та виконуємо додавання по цій парі індексів. Індексі, які повторюються двічі ми вже назвали «німими» або індексами додавання. Наприклад, маємо тензор $T_{\underbrace{\alpha\beta\ldots\gamma\ldots\delta}_{r}}$.

$$T_{\alpha\beta\ldots\alpha\ldots\delta} = \sum_{\alpha=1}^{3} T_{\alpha\beta\ldots\alpha\ldots\delta} = \tilde{T}_{\underbrace{\beta\ldots\ldots\delta}_{r-2}}. \quad (1.70)$$

В результаті згортання ранг тензора зменшується на 2. Наприклад, тензор 2-го рангу $T_{\alpha\beta}$ в результаті згортання стає скаляром

$$T_{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha'} a_{\alpha\beta'} T'_{\alpha'\beta'} = \delta_{\alpha'\beta'} T'_{\alpha'\beta'} = T'_{\alpha'\alpha'};$$

$$T_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} T_{\alpha\alpha} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T'_{11} + T'_{22} + T'_{33} = \sum_{\alpha'=1}^{3} T'_{\alpha'\alpha'} = T'_{\alpha'\alpha'}.$$

Операція згортання для тензору 2-го рангу – це визначення сліду матриці цього тензору.

Тензор 3-го рангу після згортання стає вектором $T_{\alpha\beta\gamma}$; $T_{\alpha\alpha\gamma}$. Тензор парного рангу можна згорнути до скаляра, тензор непарного рангу – до вектору.

Скалярний добуток двох векторів в тензорних позначеннях є операцією згортання

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{A}, \vec{B}) = A_\alpha B_\alpha.$$

5. Симетрія тензорів.

Тензор називається симетричним по парі індексів, якщо

$$T_{\alpha\beta\ldots\gamma} = T_{\beta\alpha\ldots\gamma} \quad (1.71)$$

Тензор називається антисиметричним по парі індексів, якщо

$$T_{\alpha\beta\ldots\gamma} = -T_{\beta\alpha\ldots\gamma} \tag{1.72}$$

Симетричний тензор 2-го рангу $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$ має 6 незалежних компонент $T_{11}, T_{22}, T_{33}, \quad T_{21} = T_{12}, T_{32} = T_{23}, T_{31} = T_{13}$.

Антисиметричний тензор 2-го рангу $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$ має тільки три ненульові компоненти незалежні компоненти, як вектор:

$$T_{11} = -T_{11}, T_{11} = 0, T_{22} = 0, T_{33} = 0, \quad T_{21} = -T_{12}, T_{32} = -T_{23}, T_{31} = -T_{13};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Будь який тензор 2-рангу можна представити у вигляді суми симетричної та антисиметричної частин

$$T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta};$$
$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}\right); \quad A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}\right). \tag{1.73}$$

При згортанні $A_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 0.$

6. Інваріантні тензори

$\delta_{\alpha\beta}$ – одиничний симетричний тензор 2-го рангу, символ Кронекера не змінюється при поворотах

$$\delta'_{\alpha'\beta'} = \begin{cases} 1, & \alpha' = \beta'; \\ 0, & \alpha' \neq \beta'. \end{cases}$$

$$\delta_{\alpha\beta} = a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} \delta'_{\alpha'\beta'} = a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\alpha'} = \delta_{\alpha\beta};$$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – одиничний повністю антисиметричний тензор 3-го рангу або символ Леві-Чивіта. При перестановці двох будь-яких індексів змінюється знак

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} = -\varepsilon_{\gamma\beta\alpha}.$$

Нехай $\varepsilon_{123} = 1$. Має 6 ненульових компонент з різними індексами:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = +1; \quad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1.$$

Компоненти, пара індексів або всі індекси співпадають (21) дорівнюють 0

$$\varepsilon_{113} = \varepsilon_{122} = ... = 0.$$

7. Антисиметричному тензору 2-го рангу (такий тензор має три ненульові компоненти) ставиться у відповідність дуальний до нього вектор за таким правилом

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_{\beta\gamma} \qquad (1.74)$$

A_α $B_{\beta\gamma}$ мають по три незалежні компоненти:

$$A_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_{1\beta\gamma}B_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{123}B_{23} + \varepsilon_{132}B_{32}\right) = B_{23};$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{2\beta\gamma}B_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{213}B_{13} + \varepsilon_{231}B_{31}\right) = -B_{13};$$
$$A_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_{3\beta\gamma}B_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{312}B_{12} + \varepsilon_{321}B_{21}\right) = B_{12};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ -B_{12} & 0 & B_{23} \\ -B_{13} & -B_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Векторний добуток двох тривимірних векторів в тензорних позначеннях

$$(\vec{A}\times\vec{B})_\alpha = ([\vec{A},\vec{B}])_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\beta B_\gamma. \qquad (1.75)$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_1 = \varepsilon_{1\beta\gamma}A_\beta B_\gamma = \varepsilon_{123}A_2B_3 + \varepsilon_{132}A_3B_2 = A_2B_3 - A_3B_2;$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_2 = \varepsilon_{2\beta\gamma}A_\beta B_\gamma = \varepsilon_{213}A_1B_3 + \varepsilon_{231}A_3B_1 = A_3B_1 - A_1B_3;$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_3 = \varepsilon_{3\beta\gamma}A_\beta B_\gamma = \varepsilon_{312}A_1B_2 + \varepsilon_{321}A_2B_1 = A_1B_2 - A_2B_1;$$

9. Диференціальні операції: ґрадієнт $\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi$, дивергенція $\mathrm{div}\vec{A} = (\nabla,\vec{A})$, ротор $\mathrm{rot}\vec{A} = [\nabla,\vec{A}]$ можна написати в тензорних позначеннях. Оператор «набла»

$$\nabla = \vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (1.76)$$

є тривимірним вектором $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$, $\quad \alpha = 1,2,3\,(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$.

Ґрадієнт напишемо, як безпосередню дію на скалярну функцію $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ лінійного оператора $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}. \tag{1.77}$$

Ґрадієнт скалярної функції є тривимірним вектором

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi'(x_1', x_2', x_3');$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi'(x_1', x_2', x_3');$$

$$\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \varphi'(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_\beta'}\left(\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\alpha}\right); \quad x_\beta' = a_{\alpha\beta}x_\alpha; \quad \left(\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\alpha}\right) = a_{\alpha\beta};$$

$$\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_\alpha} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi'(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_\beta'}.$$

Отримали закон перетворення тривимірного вектору (див. ф-лу (1.63)), тож довели, що $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$ є тривимірним вектором.

При тензорному множенні вектору на вектор матимемо тензор другого рангу

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}A_\beta.$$

Після згортання отримаємо скаляр $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}A_\alpha$, який й визначає дивергенцію вектору.

Дивергенція вектору є скаляром

$$(\nabla, \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \tag{1.78}$$

Ротор вектору є вектором

$$\begin{gathered}[\nabla, \vec{A}]_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\beta}A_\gamma; \\ [\nabla, \vec{A}]_1 = \frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2}; \quad [\nabla, \vec{A}]_2 = \frac{\partial A_3}{\partial x1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3}; \quad [\nabla, \vec{A}]_3 = \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1}.\end{gathered} \tag{1.79}$$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \qquad (1.80)$$

Оператор Лапласа – тривимірний скаляр.

10. З курсу лінійної алгебри знаємо, що симетричний тензор 2-го рангу можна привести до діагонального вигляду.

11. Перетворення тензорів при дзеркальному відображенні (інверсії). Інверсія є операцією зміни знаку у непарної кількості координат, тобто

$$x'_\alpha = -x_\alpha. \qquad (1.81)$$

Є фізичні величини, які при інверсії поводять себе інакше, ніж при поворотах. Це, наприклад, кутова швидкість. Напрямок вектору кутової швидкості визначається напрямком обертання, а він не змінюється при дзеркальному відображенні. Звичайна ж швидкість при дзеркальному відображенні осей координат змінює знак.

Є два типи тривимірних векторів:

полярний вектор при інверсії (1.81) перетворюється так, як і координати

$$A'_\alpha = -A_\alpha. \qquad (1.82)$$

аксіальний вектор (**псевдовектор**) при інверсії (1.81) не змінюється

$$A'_\alpha = A_\alpha. \qquad (1.83)$$

Приклад аксіального вектору – кутова швидкість $\vec{\omega}$.
Векторний добуток двох полярних векторів є псевдовектором. Напруженість електричного поля – полярний вектор, а напруженість магнітного поля – аксіальний вектор.

Визначення «полярний» та «аксіальний» можна поширити на тензори будь-яких рангів. Нагадаємо, що визначник матриці повороту $\det a = 1$, а визначник матриці інверсії $\det a_I = -1$.